

# Simulasi Perpindahan Panas pada Lapisan Tengah Pelat Menggunakan Metode Elemen Hingga

Vimala Rachmawati dan Kamiran

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia

e-mail: kamiran@matematika.its.ac.id

**Abstrak—** *Perpindahan panas (heat transfer) adalah energi yang berpindah karena adanya perbedaan suhu, dimana prosesnya terjadi secara konduksi, konveksi dan radiasi. Fenomena ini memunculkan model matematika perpindahan panas yang merupakan persamaan diferensial parsial dan dapat diselesaikan secara numerik. Banyak penelitian muncul yang membahas masalah perpindahan panas dengan berbagai macam medium dan solusi numerik yang digunakan. Metode yang digunakan untuk penyelesaian masalah numerik ini diantaranya adalah metode beda hingga, metode volume hingga dan metode elemen hingga. Pada penelitian ini dibahas bagaimana simulasi perpindahan panas pada lapisan tengah pelat dimana model matematikanya dikembangkan dari penelitian sebelumnya. Model matematika ini diselesaikan dengan metode elemen hingga dengan fungsi bentuk segiempat linier. Selanjutnya persamaan perpindahan panas diselesaikan dengan metode residual dan formulasi galerkin sehingga hasil akhirnya dapat disimulasikan menggunakan software MATLAB untuk mengetahui laju perpindahan panas pada lapisan tengah pelat. Dari hasil simulasi diperoleh kesimpulan bahwa banyaknya elemen yang digunakan berpengaruh pada perhitungan numerik distribusi suhu pada pelat. Selain itu, banyaknya elemen juga berpengaruh pada kontur pelat dan waktu yang dibutuhkan saat simulasi.*

**Kata Kunci—** Metode Elemen Hingga, Pelat, Perpindahan Panas.

## I. PENDAHULUAN

Perpindahan panas adalah energi yang berpindah dikarenakan adanya perbedaan suhu[1]. Proses perpindahan panas terjadi secara konduksi, konveksi dan radiasi. Fenomena ini memunculkan model matematika dari perpindahan panas yang merupakan persamaan diferensial parsial sehingga dibutuhkan sebuah solusi agar diketahui sifat dan karakteristik dari laju perpindahan panas. Penelitian tentang perpindahan panas sudah dilakukan dan dikembangkan dengan beberapa metode numerik, seperti metode beda hingga, metode volume hingga dan metode elemen hingga yang dilakukan dengan bantuan komputasi komputer.

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada permasalahan ilmu rekayasa dan matematika fisik seperti perpindahan panas, analisis struktur, aliran fluida, transportasi massa dan potensial elektromagnetik. Proses dari metode elemen hingga adalah membagi masalah yang kompleks menjadi elemen-elemen agar lebih mudah mendapatkan solusi. Solusi dari tiap elemen kemudian digabungkan sehingga menjadi solusi masalah secara keseluruhan[2].

Salah satu contoh penelitian yang membahas masalah perpindahan panas dengan penyelesaian persamaan secara numerik adalah penelitian yang dilakukan oleh Jeffers. Penelitiannya menjelaskan tentang elemen perpindahan panas yang disajikan untuk menangkap reaksi termal pada *shell* dan pelat tiga dimensi yang diselesaikan secara numerik dengan metode elemen hingga. Persamaan pembangunnya didiskritisasi menjadi serangkaian lapisan dua dimensi yang dihubungkan dengan perhitungan beda hingga dan menggunakan fungsi bentuk elemen segiempat kuadrat dengan 9 *node*. Formulasinya digunakan untuk menunjukkan akurasi dan efisiensi dari bidang suhu yang diprediksi pada *shell* yang dipanaskan tak seragam dengan beban komputasi yang ringan[3].

Berdasarkan penelitian tersebut, penelitian ini akan membahas tentang simulasi perpindahan panas pada lapisan tengah pelat. Persamaan panas yang digunakan diselesaikan secara numerik menggunakan metode elemen hingga dengan fungsi bentuk elemen segiempat linier yang memiliki 4 *node*. Hasilnya akan disimulasikan menggunakan software MATLAB.

## II. TINJUAN PUSTAKA

### A. Perpindahan Panas

Perpindahan energi dari daerah satu ke daerah lainnya akibat adanya perbedaan suhu baik dalam satu medium maupun antar medium

#### Konduksi

Perpindahan panas yang terjadi dari benda bersuhu tinggi ke benda bersuhu rendah pada medium tetap[1].

$$q = -kA \frac{dT}{dx}$$

#### Konveksi

Perpindahan panas yang terjadi antara permukaan benda padat dan fluida (cair atau gas) yang bergerak disekelilingnya[1].

$$Q_{conv} = hA(T_{\infty} - T)$$

### B. Persamaan Difusi Panas

Persamaan umum difusi panas pada koordinat kartesian yang diperoleh dari persamaan 3 dimensi kontrol volume ( $dx dy dz$ ) yaitu[1]

$$\frac{\partial}{\partial x} k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Persamaan ini sering kali ditunjuk sebagai persamaan panas sebagai pembuktian dasar untuk analisis konduksi panas. Dari solusi tersebut, diperoleh distribusi suhu  $T(x,y,z)$  sebagai fungsi waktu. Persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

### C. Metode Elemen Hingga

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teknik dan masalah matematis dari suatu gejala fisis. Tipe masalah teknis dan matematis fisis yang dapat diselesaikan dengan metode elemen hingga terbagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok masalah analisis struktur dan kelompok masalah analisis non struktur[4].

### D. Konsep Dasar Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga didasarkan pada suatu konsep dimana fungsi kontinu (seperti suhu, tekanan dan lain sebagainya) didekati dengan suatu model diskrit yang terdiri dari satu set *piecewise continuous function*. Masing-masing *piecewise function* didefinisikan untuk suatu sub domain yang disebut *finite element* (elemen hingga)[2].

Konsep ini berlaku untuk masalah dua atau tiga dimensi. Elemen dua dimensi merupakan fungsi  $x$  dan  $y$  yang pada umumnya berbentuk segitiga atau segiempat. Elemen ini dapat berbentuk bidang datar maupun bidang lengkung. Suatu kontinum terbagi menjadi beberapa bagian yang lebih kecil dan disebut elemen hingga.

Dengan menggunakan elemen hingga, suatu masalah yang memiliki jumlah derajat kebebasan tidak berhingga dapat diubah menjadi suatu masalah dengan jumlah derajat kebebasan tertentu sehingga proses pemecahannya akan lebih sederhana. Berikut langkah-langkah dasar dari metode elemen hingga :

- Diskritisasi domain
- Penentuan bentuk fungsi aproksimasi
- Penentuan sistem koordinat
- Perhitungan properti elemen
- Pembentukan sistem persamaan linier
- Penyelesaian sistem persamaan linier
- Post process hasil

## III. METODE PENELITIAN

### A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dikumpulkan referensi dimana didalamnya terdapat teori-teori dasar yang mendukung pembahasan masalah. Selanjutnya akan dipelajari lebih lanjut tentang perpindahan panas pada pelat dan metode elemen hingga

### B. Tahap Penyelesaian Numerik

Pada tahap ini akan dilakukan penyelesaian secara numerik dari persamaan perpindahan panas pada lapisan tengah pelat menggunakan metode elemen hingga. Dimulai dengan diskritisasi domain pada pelat. Selanjutnya fungsi bentuk yang digunakan adalah fungsi interpolasi elemen segiempat linier. Kemudian fungsi bentuk ini disubstitusikan ke persamaan diferensial yang akan diselesaikan dengan formulasi galerkin. Dibentuk matriks global yang disusun dari matriks tiap elemen.

### C. Tahap Simulasi

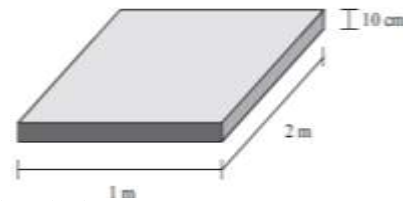
Pada tahap ini dilakukan simulasi menggunakan MATLAB untuk melihat laju perpindahan panas yang terjadi pada pelat.

### D. Tahap Penarikan Kesimpulan

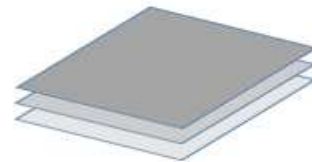
Pada tahap ini akan dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil simulasi MATLAB.

## IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Perpindahan panas yang terjadi pada lapisan tengah pelat dimana dimensi pelat yang dikaji adalah pelat baja datar berbentuk segiempat tiga dimensi yang kemudian dibagi menjadi tiga lapisan, ditunjukkan oleh Gambar 1. dan Gambar 2 [3].

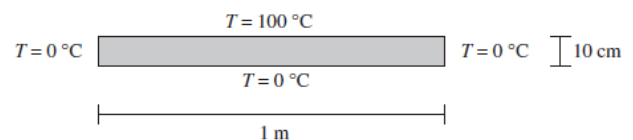


Gambar 1. Dimensi pelat

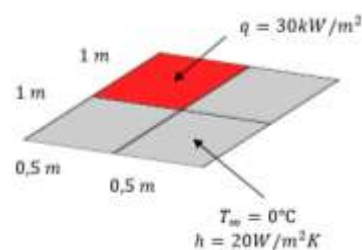


Gambar 2. Pelat yang dibagi menjadi 3 lapisan

Kondisi batas yang diberikan pada pelat segiempat ditunjukkan oleh Gambar 3. dan Gambar 4. Diberikan baja memiliki massa jenis  $\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$ , konduktivitas panas  $k = 54 \text{ W/m.K}$  dan kapasitas panas  $C = 465 \text{ J/kg.K}$ .



Gambar 3. Skema kondisi batas pada sisi depan pelat



Gambar 4. Skema kondisi batas pada permukaan pelat

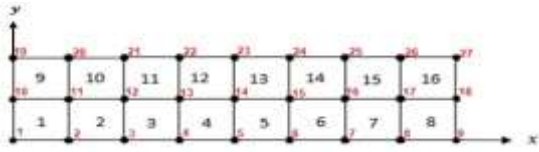
### A. Model Governing Equations

*Governing Equation* yang digunakan adalah persamaan perpindahan panas konduksi yang diperoleh dari aplikasi hukum pertama termodinamika untuk kontrol volume 3D. Karena ketebalan lapisan relatif kecil atau sangat tipis, maka dapat diasumsikan bahwa gradien  $\frac{\partial T}{\partial z}$  mendekati nol. Sehingga persamaan semula 3D untuk  $T(x, y, z, t)$  menjadi 2D untuk  $T(x, y, t)$  yaitu

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - Q = 0 \quad (1)$$

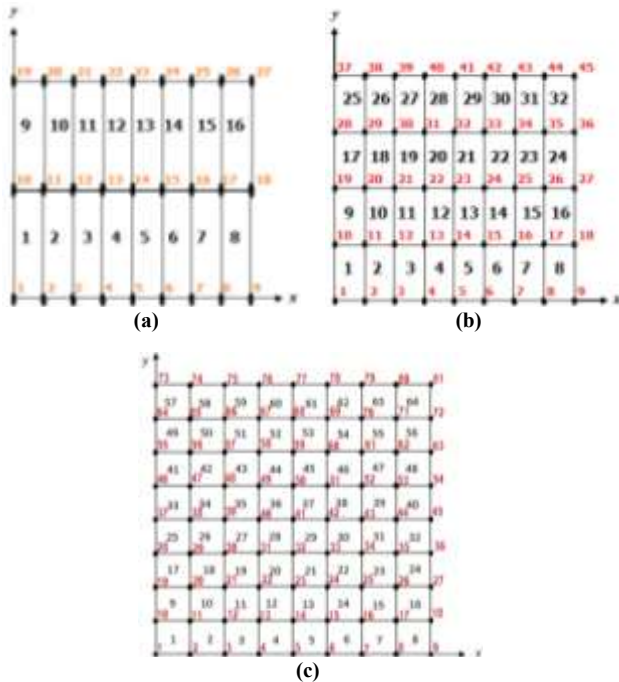
### B. Diskritisasi Domain

Pelat baja yang dikaji kemudian didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node* untuk sisi depan pelat, ditunjukkan oleh Gambar 5.



Gambar 5. Sisi depan pelat yang didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node*

Sedangkan untuk permukaan pelat didiskritisasikan menjadi 16 elemen dengan 27 *node*, 32 elemen dengan 45 *node* dan 64 elemen dengan 81 *node*, ditunjukkan oleh Gambar 6.



Gambar 6. Permukaan pelat yang didiskritisasikan menjadi (a) 16 elemen, (b) 32 elemen dan (c) 64 elemen.

### C. Fungsi Bentuk Aproksimasi

Fungsi bentuk aproksimasi yang digunakan adalah fungsi interpolasi elemen segiempat linier, dinyatakan sebagai berikut[5] :

$$T = C_1 + C_2s + C_3t + C_4st \quad (2)$$

Fungsi bentuk untuk elemen segiempat linier dapat dinyatakan sebagai pendekatan nilai distribusi suhu  $T$  yaitu

$$\begin{aligned} T &= N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k + N_m T_m \\ &= [N_i \ N_j \ N_k \ N_m] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_m \end{bmatrix} \\ &= [N] \{T\} \end{aligned} \quad (3)$$

dimana

$$\begin{cases} N_i = \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_j = \frac{2}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_k = \frac{st}{4ab} \\ N_m = \frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \end{cases} \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan fungsi bentuk yang berlaku untuk sistem koordinat lokal. Sedangkan fungsi bentuk yang berlaku pada sistem koordinat natural dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_j = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \\ N_m = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \end{cases} \quad (5)$$

### D. Perhitungan Properti Elemen

*Governing equation* dihitung dengan menggunakan pendekatan residu berbobot (*weighted residue*) dan Formulasi Galerkin. Diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA - \int_A [N]^T k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dA - \int_A [N]^T k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dA - \int_A [N]^T Q dA = 0 \quad (6)$$

Suku kedua dan ketiga dari Persamaan (6) merupakan persamaan derivatif tingkat dua yang harus disederhanakan menjadi persamaan derivatif tingkat satu dengan menggunakan Teorema Green. Sehingga diperoleh

$$\int_A k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dA - \int_A \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial x} \bar{n}_x dS \quad (7)$$

$$\int_A k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dA = - \int_A \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial y} \bar{n}_y dS \quad (8)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (7) dan (8) ke Persamaan (6), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_A [N]^T \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA + \int_A \frac{\partial [N]^T}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA - \\ \int_S [N]^T k \frac{\partial T}{\partial n} \bar{n} dS - \int_A [N]^T Q dA = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Diberikan kondisi batas konduksi dan konveksi pada permukaan  $S$  sebagai berikut :

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q \text{ dan } k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_\infty - T) \quad (10)$$

### E. Pembentukan Sistem Persamaan Linier

Persamaan (3) dan (10) disubstitusikan ke Persamaan (9), diperoleh

$$\begin{aligned} \int_A [N]^T \rho C [N] \{\dot{T}\} dA + \int_A k \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA + \\ \int_S [N]^T q dS + \int_S [N]^T h T_\infty dS = \int_A [N]^T Q dA \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$[K_G] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{f\} \quad (11)$$

dimana

$$[K_G] = \int_A [N]^T \rho C [N] dA \quad (12)$$

$$[K] = [K_D] + [K_M]$$

$$[K_D] = \int_A k \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dA \quad (13)$$

$$[K_M] = \int_S [N]^T h [N] dS \quad (14)$$

$$\{f\} = \{f_Q\} + \{f_h\} + \{f_q\}$$

$$\{f_Q\} = \int_A [N]^T Q dA \quad (15)$$

$$\{f_h\} = \int_S [N]^T h T_\infty dS \quad (16)$$

$$\{f_q\} = \int_S [N]^T q dS \quad (17)$$

#### F. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Untuk memperoleh matrik kekakuan kapasitansi  $[K_G^{(e)}]$ , matrik kekakuan konduksi  $[K_D^{(e)}]$  dan vektor kekakuan konduksi  $\{f_Q^{(e)}\}$ , fungsi bentuk yang digunakan ada pada Persamaan (4).

Sedangkan untuk memperoleh vektor kekakuan konduksi  $\{f_q^{(e)}\}$ , matrik kekakuan konveksi  $[K_M^{(e)}]$  dan vektor kekakuan konveksi  $\{f_h^{(e)}\}$ , digunakan fungsi bentuk pada Persamaan (5).

##### i. Matrik Kekakuan Kapasitansi

Diperoleh matrik kekakuan kapasitansi  $[K_G^{(e)}]$  pada Persamaan (12) yaitu

$$\begin{aligned} [K_G^{(e)}] &= \int_A G [N]^T [N] dA \text{ dengan } G = \rho C. \\ &= G \int_A \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_m \end{bmatrix} dA \\ &= \frac{GA}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

##### ii. Matrik Kekakuan Konduksi

Diperoleh matrik kekakuan konduksi  $[K_D^{(e)}]$  pada Persamaan (13), yaitu

$$\begin{aligned} [K_D^{(e)}] &= \int_A \left( k \frac{\partial [N]^T}{\partial s} \frac{\partial [N]}{\partial s} + k \frac{\partial [N]^T}{\partial t} \frac{\partial [N]}{\partial t} \right) dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_j}{\partial s} & \frac{\partial N_j}{\partial t} \\ \frac{\partial N_k}{\partial s} & \frac{\partial N_k}{\partial t} \\ \frac{\partial N_m}{\partial s} & \frac{\partial N_m}{\partial t} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & \frac{\partial N_j}{\partial s} & \frac{\partial N_k}{\partial s} & \frac{\partial N_m}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} & \frac{\partial N_j}{\partial t} & \frac{\partial N_k}{\partial t} & \frac{\partial N_m}{\partial t} \end{bmatrix} dA \\ &= \frac{ak}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{bk}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Diperoleh vektor kekakuan konduksi  $\{f_Q^{(e)}\}$  pada Persamaan (15), yaitu

$$\begin{aligned} \{f_Q^{(e)}\} &= \int_A Q \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} dA \\ &= \frac{QA}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

##### iii. Matrik Kekakuan Konveksi

Matrik kekakuan konveksi  $[K_M^{(e)}]$  pada Persamaan (14) yaitu

$$\begin{aligned} [K_M^{(e)}] &= h \int_S \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_m \end{bmatrix} dS \\ &= h \int_S \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_m \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k & N_j N_m \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 & N_k N_m \\ N_i N_m & N_j N_m & N_k N_m & N_m^2 \end{bmatrix} dS \end{aligned}$$

diperoleh matrik kekakuan konveksi  $[K_M^{(e)}]$  untuk tiap sisi, yaitu

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{km}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[K_M^{(e)}] = \frac{hL_{im}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Vektor kekakuan konveksi  $\{f_h^{(e)}\}$  pada Persamaan (16) yaitu

$$\begin{aligned} \{f_h^{(e)}\} &= \int_S H [N]^T dS \text{ dengan } H = hT_\infty \\ &= \int_{-b}^b H \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} dq \end{aligned}$$

diperoleh vektor kekakuan konveksi  $\{f_h^{(e)}\}$  untuk tiap sisi, yaitu

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{km}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{f_h^{(e)}\} = \frac{HL_{im}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

diperoleh vektor kekakuan konduksi  $\{f_q^{(e)}\}$  pada Persamaan (17) untuk tiap sisi, yaitu

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{km}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\{f_q^{(e)}\} = \frac{q L_{lm}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

### G. Post Process Hasil

Permasalahan yang dikaji merupakan perpindahan panas transien dimana variabel penentunya adalah  $x, y$  dan  $t$  (waktu). Setelah mendapatkan penyelesaian sistem persamaan secara global yaitu pada Persamaan (11) dimana terdapat suku derivatif  $\{\dot{T}\}$  yang kemudian dapat diekspresikan oleh  $\{T\}$  dengan menggunakan diskritisasi beda hingga (*finite difference method*). Karena yang diketahui adalah suhu awal maka metode beda hingga yang digunakan adalah beda maju.  $\{\dot{T}\}$  yang dihitung dengan beda maju yaitu

$$\{\dot{T}\}(t) = \frac{\{T\}(t+\Delta t) - \{T\}(t)}{\Delta t} \quad (33)$$

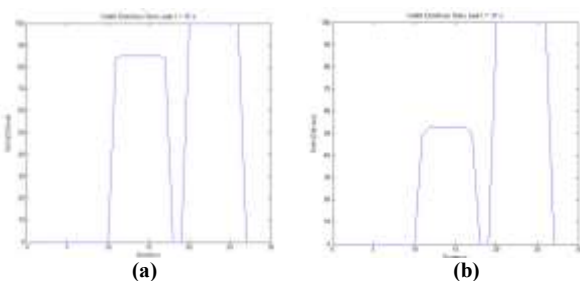
Substitusi Persamaan (33) ke Persamaan (11) diperoleh

$$\{T\}(t + \Delta t) = [K_G]^{-1} \{f\} \Delta t - [K_G]^{-1} [K] \{T\}(t) \Delta t + \{T\}(t) \quad (34)$$

### H. Simulasi dan Analisis

#### i. Sisi Depan Pelat

Simulasi dilakukan dengan kondisi batas yang ditunjukkan oleh Gambar 3 serta diskritisasi domain oleh Gambar 5.



Gambar 7. Grafik Distribusi Suhu saat (a)  $t = 10$  s dan (b)  $t = 37$  s

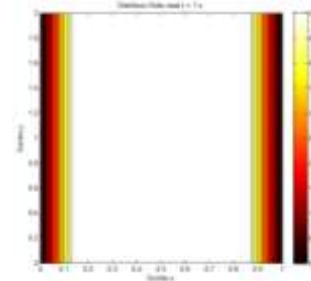
Gambar 7. Menunjukkan grafik distribusi suhu pada sisi depan pelat saat  $t=10$ s dan 37s. Distribusi suhu yang dihasilkan pada saat itu berbeda. Distribusi suhu yang digunakan ada pada Grafik (b). Suhu tersebut dianggap sudah mendekati suhu pada bagian tengah dari sisi depan pelat. Sehingga suhu tersebut dapat digunakan sebagai

*inputan* suhu awal untuk permukaan pelat pada simulasi berikutnya.

#### ii. Permukaan Pelat

Simulasi dilakukan dengan kondisi batas yang ditunjukkan oleh Gambar 4 serta diskritisasi domain oleh Gambar 6.

##### 1. Saat $t = 1$ s

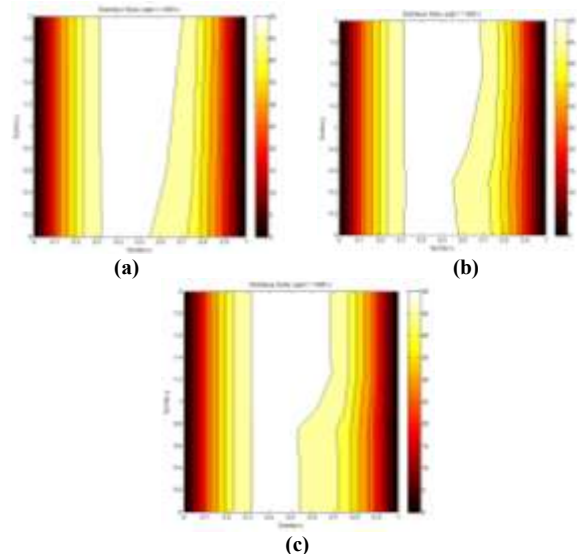


Gambar 8. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat  $t = 1$  s

Kondisi awal untuk semua permukaan pelat dengan diskritisasi yang berbeda pada saat  $t = 1$  s. *Inputan* nilai awal untuk suhu pada pelat diambil dari suhu pada simulasi sebelumnya dimana suhu pada *node* 10-18 menggantikan suhu pada *node* 1-9, juga menggantikan suhu pada *node* 10-18 dan seterusnya.

Sisi kanan dan sisi kiri pada permukaan pelat dipertahankan konstan  $0^\circ\text{C}$ . Pada kondisi ini belum terjadi perambatan panas pada pelat.

##### 2. Saat $t = 600$ s

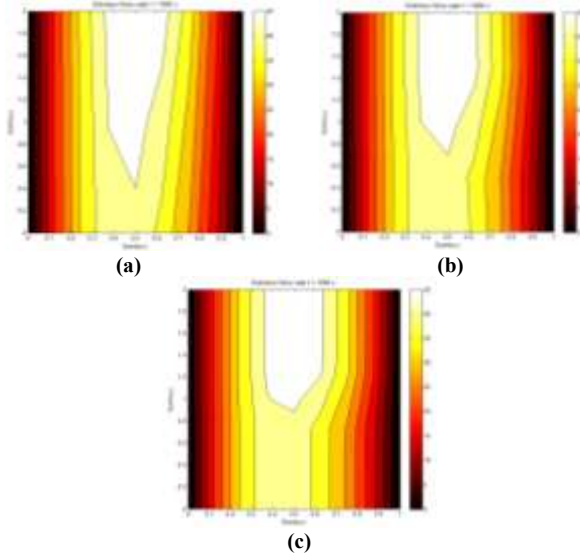


Gambar 9. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat  $t = 600$  s untuk (a) 16 elemen, (b) 32 elemen dan (c) 64 elemen

Gambar 9. menunjukkan kondisi permukaan pelat saat  $t = 600$  s. Semua pelat mengalami perubahan kontur yaitu sisi kiri dan kanan bergerak menuju tengah pelat. Hal ini dapat diamati dari perubahan jarak sumbu  $x$  pada gambar. Namun kontur pada sisi kanan bagian bawah bergerak lebih lebar ke tengah hingga mencapai hampir setengah dari panjang pelat pada sumbu  $x$ . Ini disebabkan karena konveksi yang masuk pada sisi kanan bawah permukaan pelat sudah merambat hingga seperempat bagian pelat dan menyebabkan distribusi suhu pada bagian tersebut lebih rendah dibandingkan lainnya. Sedangkan *flux* yang masuk pada sisi atas pelat menyebabkan

rambatan konveksi berjalan lambat sehingga perubahan kontur yang terjadi tidak sama. Dilihat dari sisi simulasi, semakin banyak diskritisasi elemen yang digunakan maka semakin halus kontur yang dihasilkan. Hal ini dapat diamati dari perbedaan kontur pada ketiga gambar. Kondisi ini menunjukkan bahwa semakin banyak elemen yang digunakan, distribusi suhu pada pelat akan semakin mendekati suhu sebenarnya.

### 3. Saat $t = 1.800 \text{ s}$



Gambar 10. Distribusi Suhu pada Permukaan Pelat saat  $t = 1.800 \text{ s}$  untuk (a) 16 elemen, (b) 32 elemen dan (c) 64 elemen

Gambar 10. menunjukkan kondisi permukaan pelat saat  $t = 1.800 \text{ s}$ . Semua pelat mengalami perubahan kontur lebih banyak dibandingkan sebelumnya. Konveksi yang merambat hampir memenuhi permukaan pelat. Hal ini dapat diamati dari perubahan warna kontur yang berbeda pada Gambar 10. jika dibandingkan dengan Gambar 9.

Sedangkan warna putih pada kontur menunjukkan bahwa *flux* yang masuk pada sisi atas pelat menyebabkan rambatan konveksi berjalan lambat. Sehingga pada bagian tersebut distribusi suhunya lebih tinggi dibandingkan lainnya. Dilihat dari sisi simulasi, semakin banyak diskritisasi elemen yang digunakan maka semakin halus kontur yang dihasilkan. Hal ini dapat diamati dari perbedaan kontur pada ketiga gambar. Kondisi ini menunjukkan bahwa semakin banyak elemen yang digunakan, distribusi suhu pada pelat akan semakin mendekati suhu sebenarnya.

## V. KESIMPULAN

Dari analisa yang telah dilakukan pada pelat, dapat disimpulkan bahwa :

1. Secara numerik hasil distribusi suhu dari lapisan tengah pelat dipengaruhi oleh banyaknya elemen yang digunakan. Semakin banyak elemen yang digunakan maka distribusi suhu yang dihasilkan akan semakin akurat meskipun perubahan numeriknya tidak terlalu signifikan. Hal ini dapat diamati dari perubahan suhu pada *node-node* yang bersesuaian.
2. Banyaknya elemen yang digunakan juga berpengaruh pada simulasi. Semakin banyak elemen yang digunakan maka kontur yang dihasilkan akan semakin

halus atau perpindahan panas semakin terlihat untuk tiap *node* meskipun waktu yang dibutuhkan untuk simulasi akan menjadi lebih lama.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Incropera, F.P., DeWitt, D.P. 1990. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 3th ed.** New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [2] Kosasih, P.B. 2012. **Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga.** Yogyakarta: ANDI OFFSET.
- [3] Jeffers, A.E. **Heat Transfer Element for Modelling The Thermal Response of Non-Uniformly Heated Plates.** Scientific Research: Finite Elements in Analysis and Design, 2013, 63, 62-68.
- [4] Susatio, Y. 2004. **Dasar-Dasar Metode Elemen Hingga.** Yogyakarta : ANDI OFFSET.
- [5] Segerlind, L.J. 1984. **Applied Finite Element Analysis, 2th ed.** Canada: John Wiley and Sons, Inc.